

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN

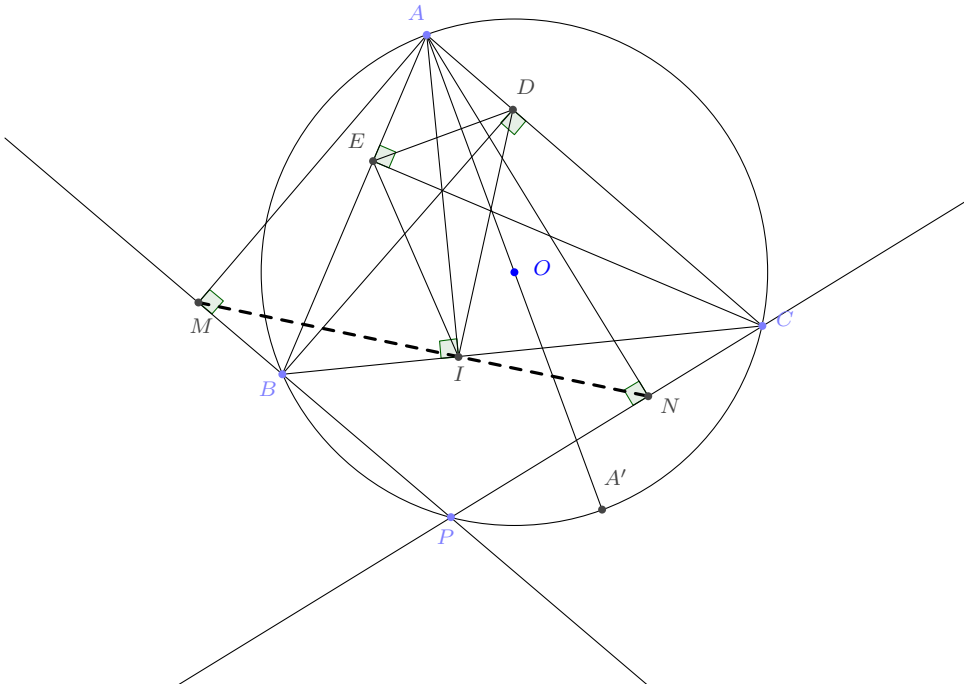
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề.

HƯỚNG DẪN CHẤM
(Hướng dẫn chấm này có 03 trang.)

| CÂU | NỘI DUNG | ĐIỂM |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1(5,0đ) | 1. (3,5 điểm) | |
| | a) Điều kiện: $m \geq 0, m \neq 1$ | 0,5đ |
| | $P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$ | 2,0đ |
| | b) $P = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1}$ | 0,5đ |
| | Để $P \in \mathbb{N} \implies m \in \{4; 9\}$ | 0,5đ |
| | 2.(1,5 điểm) | |
| | $a = \sqrt[3]{13 - 7\sqrt{6}} + \sqrt[3]{13 + 7\sqrt{6}} \implies a^3 = 26 - 15a$ | 1,0đ |
| $a^3 + 15a - 25 = 1 \implies (a^3 + 15a - 25)^{2013} = 1$ | 0,5đ | |
| 2(5,0đ) | 1. (2,5 điểm) | |
| | Điều kiện: $-5 \leq x \leq 3$ | 0,5đ |
| | Đặt $t = \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}, t^2 = 8 + 2\sqrt{15-2x-x^2} \implies t \geq 2\sqrt{2}$ | |
| | Phương trình đã cho có dạng: $t^2 - t - 6 = 0 \iff \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$ | 1,0đ |
| | $t = 3 \iff \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x} = 3$ | 1,0đ |
| | $\iff 4x^2 + 8x - 59 = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{-2 + 3\sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{-2 - 3\sqrt{7}}{2} \end{cases}$ | |
| | 2. (2,5 điểm) | |
| | Đặt $x^2 = y \geq 0$. Hệ trở thành: $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ -x + my = -2 \end{cases}$ | 0,5đ |
| | Hệ luôn có nghiệm: $\begin{cases} x = \frac{m+4}{m^2+2} \\ y = \frac{1-2m}{m^2+2} \geq 0 \text{ (} m \leq \frac{1}{2} \text{)}$ | 0,5đ |
| Ta có: $x^2 = y \iff \left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2 = \frac{1-2m}{m^2+2}$ | 0,5đ | |
| $\iff (m+1)(m^2 - m + 7) = 0 \iff m = -1$ | 1,0đ | |
| 3(5,0đ) | 1. (3,0 điểm) | |

Tiếp

| CÂU | NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| | Không mất tính tổng quát giả sử: $1 \leq x \leq y \leq z$ $\implies 2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \implies x = 1$ | 1,0đ |
| | $\implies \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \leq \frac{2}{y} \implies \begin{cases} y = 1 \text{ (vô lý)} \\ y = 2 \implies z = 2 \end{cases}$ | 1,0đ |
| | Vậy (1; 2; 2) và các hoán vị của chúng là nghiệm của phương trình đã cho | 1,0đ |
| | 2. (2,0 điểm) | |
| | Hệ $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 2 - a \text{ (} a \geq 0 \text{)} \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$ | 0,5đ |
| | Do đó: $\begin{cases} x + y = 2 - a \\ xy = (2 - a)^2 - 3 \end{cases}$, $\Delta = S^2 - 4P \geq 0 \implies 0 \leq a \leq 4$ | 0,5đ |
| | $T = x^2 + y^2 + xy - 2xy = 9 - 2(2 - a)^2$ | 0,5đ |
| | min $T = 1$ khi $x = 1, y = 1$ hoặc $x = -1, y = -1$ max $T = 9$ khi $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$ | 0,5đ |
| | | |
| 4(2,0đ) | | |
| | Gọi C là điểm trên đoạn thẳng OA sao cho $OC = \frac{R}{2}$, ta có điểm C cố định | 0,5đ |
| | Dễ thấy $\triangle OCM$ đồng dạng $\triangle OMA \implies MA = 2MC$ | 0,5đ |
| | Ta có $MA + MB \geq BC$ (không đổi) $MA + 2MB = 2(MB + MC) \geq 2BC$ | 0,5đ |
| | Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa B và C | |
| | Vậy khi điểm M là giao điểm của đoạn BC và đường tròn (O) thì $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất | 0,5đ |
| 5(3,0đ) | 1. (2,0 điểm) | |

| CÂU | NỘI DUNG | ĐIỂM |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| |  | |
| | <p>Kẻ $AI \perp BC, I \in BC$ cố định. Ta có $\widehat{BMA} = \widehat{BIA} = 90^\circ$ nên tứ giác $AMBI$ nội tiếp hay $\widehat{AIM} = \widehat{ABM}$ Ta lại có tứ giác $ABPC$ nội tiếp nên $\widehat{ABM} = \widehat{ACP}$ Do đó $\widehat{AIM} = \widehat{ACP}$ (1)</p> | 1,0đ |
| | <p>Mặt khác $\widehat{AIC} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AINC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ACP} + \widehat{AIN} = 180^\circ$ (2)</p> | 0,5đ |
| | <p>Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIM} + \widehat{AIN} = 180^\circ$</p> | 0,5đ |
| | <p>Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I</p> | |
| | <p>2. (1,0 điểm)</p> | |
| | <p>Tứ giác $BCDE$ nội tiếp suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ Kéo dài AO cắt $(O; R)$ tại điểm A'. Ta có: $\widehat{EA'O} + \widehat{AED} = \widehat{BAA'} + \widehat{ACB} = 90^\circ$ $\implies AO \perp DE \implies S_{AEOD} = \frac{1}{2}AO \cdot DE = \frac{1}{2}R \cdot DE$</p> | 0,5đ |
| | <p>Tương tự ta cũng có: $S_{BEOI} = \frac{1}{2}R \cdot EI, S_{CDOI} = \frac{1}{2}R \cdot ID$ Vậy: $S_{ABC} = S_{AEOD} + S_{BIOE} + S_{CDOI} = \frac{1}{2}R \cdot (DE + EI + ID)$ $\implies DE + EI + ID = \frac{2S_{ABC}}{R} = \frac{2a^2}{R}$ (không đổi)</p> | 0,5đ |

—HẾT—

Ghi chú:

- Mọi cách giải đúng khác đáp án đều cho điểm tối đa.